Aula 6a – Morfologia matemática

Prof. João Fernando Mari
joaof.mari@ufv.br

Morfologia matemática

A linguagem da morfologia matemática é a teoria dos conjuntos

- Os objetos em uma imagem são representados como conjuntos

- O conjunto de todos os pixels brancos (ou pretos, dependendo da convenção) em uma imagem binária é uma representação completa da imagem

Em imagens binárias esses conjuntos estão em Z^2

- Cada elemento do conjunto é um vetor bidimensional
  - Cada dimensão corresponde às coordenadas (x, y) de um pixel branco da imagem

As imagens em níveis de cinza podem ser representadas como conjuntos em Z^3

- Dois componentes de cada elemento referem-se às coordenadas do pixel
- O terceiro corresponde ao seu valor discreto de intensidade

Conjuntos

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1
2	0	0	1	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

C_0 = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3) }
C_1 = { (1, 5), (1, 6), (1, 7), (2, 7), (3, 6), (3, 7) }
C_2 = { (5, 5) }
C_3 = { (5, 1), (5, 2), (6, 1), (6, 2) }

Conjuntos

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	1	0	5	7	5
2	0	0	2	3	0	0	0	6
3	0	0	0	0	0	0	4	7
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	2	0	0	3	0	0
6	0	1	3	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

C_0 = { (1, 1, 1), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 2, 2), (2, 3, 3) }
C_1 = { (1, 5, 5), (1, 6, 7), (1, 7, 5), (2, 7, 6), (3, 6, 4), (3, 7, 7) }
C_2 = { (5, 1, 1), (5, 2, 2), (6, 1, 1), (6, 2, 3) }
C_3 = { (5, 5, 3) }

Operações básicas com conjuntos

Seja A um conjunto de pares ordenados de números reais

- Se a=(a_1, a_2) for um elemento de A, temos:
  - $a \in A$ (a *é elemento* de A)
- Se a não for um elemento de A:
  - $a \notin A$ (a *não é elemento* de A)
- Se um conjunto não contém elementos:
  - Conjunto vazio – $\emptyset$

Um conjunto é especificado pelo conteúdo de duas chaves

- **[EX]** $C = \{w | w = -d, d \in D\}$
- C é o conjunto dos elementos, w, tal que w é formado multiplicando cada um dos elementos do conjunto D por -1

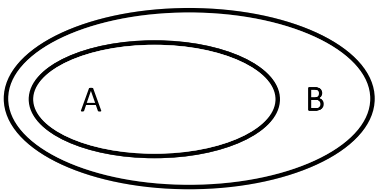
Uma forma de utilizar conjuntos em processamento de imagens é:

- Considerar os elementos do conjunto como as coordenadas dos pixels (pares ordenados de números inteiros)
- Cada conjunto representa regiões (objetos) na imagem

Operações básicas com conjuntos

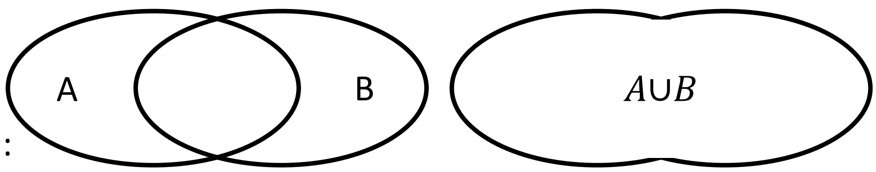
Se cada elemento de um conjunto A também é elemento de um conjunto B, então...

- A é subconjunto de B
- $A \subseteq B$



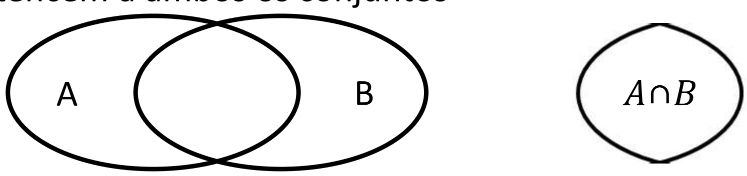
A união dos conjuntos A e B é:

- O conjunto dos elementos que pertencem ou ao conjunto A, ou ao B ou a ambos
- $C = A \cup B$



A intersecção de dois conjuntos A e B é:

- O conjunto de elementos que pertencem a ambos os conjuntos
- $D = A \cap B$



Operações básicas com conjuntos

A reflexão de um conjunto *B*, $\hat{B}$, é:

$$\hat{B} = \{w | w = -b, para\ b \in B\}$$

Se *B* é o conjunto de pixels que representa um objeto,

$\hat{B}$ é conjunto de pixels em B cujas coordenadas *(x, y)* foram substituídas pro *(-x, -y)*.

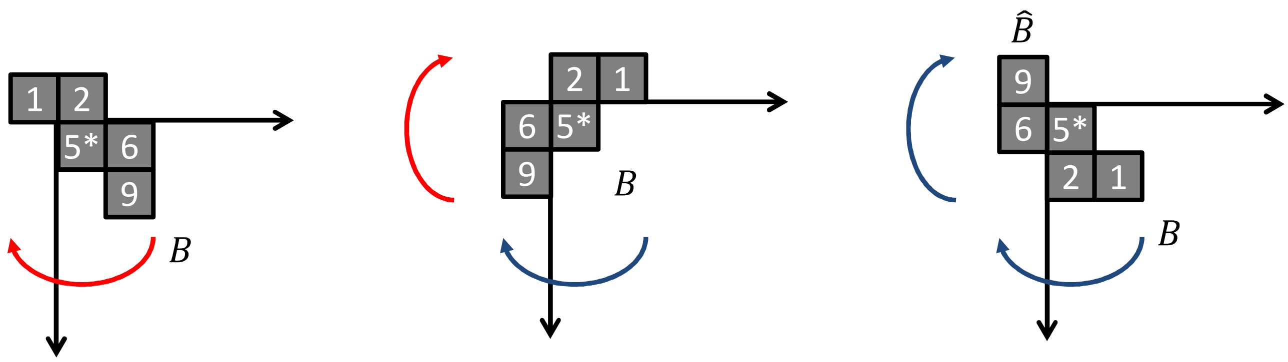
A translação de um conjunto *B* no ponto (z_1, z_2), $(B)_z$, é:

$$(B)_z = \{c | c = b + z, para\ b \in B\}$$

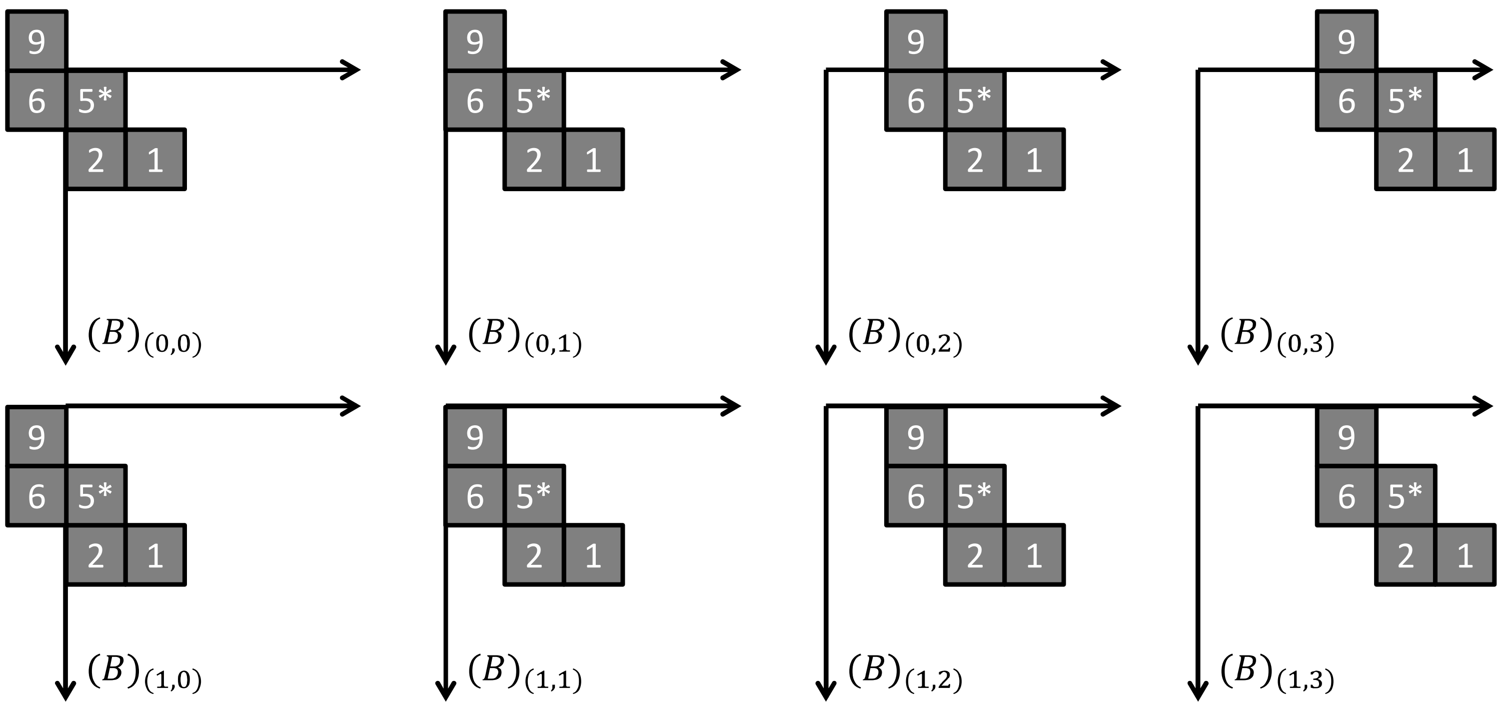
Se *B* é o conjunto de pixels que representa um objeto,

$(B)_z$ é o conjunto de pixels em *B* cujas coordenadas *(x, y)* foram substituídas por $(x+z_1, y+z_2)$

Reflexão



Translação



Elementos estruturantes

- Elemento estruturante (EE)
  - Conjuntos pequenos ou subimagens usados para examinar uma imagem buscando propriedades de interesse.

0	1	0
1	1	1
0	1	0

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1
1
1
1
1

0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

1	1	1
0	0	1
0	1	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0*

O * indica o centro do elemento estruturante

Quando omitido, o centro do EE corresponde ao centro da matriz

Erosão

São operações fundamentais da morfologia matemática.

Muitos dos algoritmos morfológicos são derivados dessas duas operações.

A **erosão** de um conjunto *A* por um EE *B* é:

$$A \ominus B = \{z \mid (B)_z \subseteq A\}$$

A erosão de A por B é o conjunto de todos *z* de forma que *B* transladado por *z*, está contido em *A*.

Uma definição alternativa para o mesmo caso.

Dizer que *B* esta contido em *A* equivale a dizer que *B* não tem elementos comuns com o fundo.

$$A \ominus B = \{z \mid (B)_z \cap A^c = \emptyset\}$$

Erosão

$$A \ominus B = \{z \mid (B)_z \subseteq A\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

B

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

$A \ominus B$

Erosão

$$A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

B

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

$A \ominus B$

Erosão

$$A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1
1
1
1
1

B

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								

$A \ominus B$

Erosão

$$A \ominus B = \{z | (B)_z \subseteq A\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1
1
1
1
1

B

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

$A \ominus B$

Dilatação

A **dilatação** de um conjunto *A* por um EE *B* é:

$$A \oplus B = \left\{z \middle| (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\right\}$$

Primeiramente, realiza-se a reflexão de B em torno de sua origem.

A dilatação de *A* por *B* é o conjunto de todos os deslocamentos *z*, de forma que $\hat{B}$ (reflexão de *B*) e *A* se sobreponham em pelo menos um elemento.

Uma definição alternativa para o mesmo caso:

$$A \oplus B = \left\{z \middle| \left[(\hat{B})_z \cap A\right] \subseteq A\right\}$$

Dilatação

$$A \oplus B = \{z \,|\, (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

B

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

$A \oplus B$

Dilatação

$$A \oplus B = \{z \,|\, (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1	1	1
1	1	1
1	1	1

B

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	1	1	1	1	1	1	0
3	0	1	1	1	1	1	1	0
4	0	1	1	1	1	1	1	0
5	0	1	1	1	1	1	1	0
6	0	1	1	1	1	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

$A \oplus B$

Dilatação

$$A \oplus B = \{z | (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1
1
1
1
1

B

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

$A \oplus B$

Dilatação

$$A \oplus B = \{z | (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

A

1
1
1
1
1

B

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0
2	0	0	1	1	1	1	0	0
3	0	0	1	1	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1	0	0
5	0	0	1	1	1	1	0	0
6	0	0	1	1	1	1	0	0
7	0	0	1	1	1	1	0	0

$A \oplus B$

Dualidade

A dilatação e a erosão são operações duais:

$$(A \ominus B) = A^c \oplus \hat{B}$$
$$(A \oplus B) = A^c \ominus \hat{B}$$

A **erosão** de A por B é o complemento da dilatação de A^c por $\hat{B}$

A **dilatação** de A por B é o complemento da erosão de A^c por $\hat{B}$

Quando o EE é simétrico pode-se obter a dilatação por meio da erosão do fundo da imagem.

Assim como, obter a erosão por meio da dilatação do fundo da imagem

Morfologia matemática em níveis de cinza

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	1	0	5	7	5
2	0	0	2	3	0	0	0	6
3	0	0	0	0	0	0	4	7
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	2	0	0	3	0	0
6	0	1	3	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	1
2	0	0	1	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

1

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

2

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1
2	0	0	0	1	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

3

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

4

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

5

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

6

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0

7

Referências

MARQUES FILHO, O.; VIEIRA NETO, H. **Processamento digital de imagens**. Brasport, 1999.

Disponível para download no site do autor (Exclusivo para uso pessoal)

http://dainf.ct.utfpr.edu.br/~hvieir/pub.html

GONZALEZ, R.C.; WOODS, R.E.; **Processamento Digital de Imagens.** 3ª edição. Editora Pearson, 2009.

Disponível na Biblioteca Virtual da Pearson.

J. E. R. Queiroz, H. M. Gomes. **Introdução ao Processamento Digital de Imagens**. RITA. v. 13, 2006.

http://www.dsc.ufcg.edu.br/~hmg/disciplinas/graduacao/vc-2016.2/Rita-Tutorial-PDI.pdf