

[Aula 12] Linguagem livre de contexto – Simplificação de GLC

Prof. João F. Mari
joaof.mari@ufv.br

BIBLIOGRAFIA

- MENEZES, P. B. **Linguagens formais e autômatos**, 6. ed., Bookman, 2011.
 - Capítulo 6.
 - + Slides disponibilizados pelo autor do livro.



ROTEIRO

- Simplificação de GLC
- Simplificação de GLC – Símbolos Inúteis
- EXEMPLO: Simplificação de GLC – Símbolos Inúteis
- Simplificação de GLC – Produções vazias
- EXEMPLO: Simplificação de GLC – Produções Vazias
- Simplificação de GLC: Produções que Substituem Variáveis
- EXEMPLO: Produções que Substituem Variáveis
- Simplificação de GLC – Simplificações Combinadas

Simplificação de GLC

- Simplificação de Gramática Livre de Contexto consiste em:
 - **Simplificar** de alguns tipos de produções.
 - **sem reduzir o poder de geração** das GLC.
- Simplificações são importantes para:
 - Construção e otimização de algoritmos.
 - Demonstração de teoremas.

Simplificação de GLC

- Simplificações:
 - **(1) Símbolos inúteis**
 - exclusão de variáveis ou terminais não usados.
 - **(2) Produções vazias, da forma $A \rightarrow \epsilon$**
 - Se ϵ pertence à linguagem: incluída produção vazia específica
 - **(3) Produções que substituem variáveis, da forma $A \rightarrow B$**
 - Substituem uma variável por outra
 - Não adicionam informação de geração de palavras

Simplificação de GLC – Símbolos Inúteis

- **Símbolos inúteis:**
 - São símbolos não usados na geração de **palavras de terminais**.
- A simplificação exclui:
 - Produções que fazem referência a esses símbolos.
 - Os próprios símbolos inúteis.

Simplificação de GLC – Símbolos Inúteis

- **Algoritmo: Exclusão de Símbolos Inúteis**
- **Etapa 1: toda variável deve gerar terminais**
 - Considera todas as variáveis que geram terminais diretamente
 - Exemplo: $A \rightarrow a$
 - Adiciona, sucessivamente, variáveis que geram terminais indiretamente
 - Exemplo: $B \rightarrow Ab$
- **Etapa 2: qualquer símbolo deve ser atingível a partir do símbolo inicial**
 - Analisa as produções da gramática a partir do símbolo inicial
 - Considera exclusivamente o símbolo inicial
 - Sucessivamente as produções da gramática são aplicadas:
 - Os símbolos referenciados são adicionados aos novos conjuntos.

Simplificação de GLC – Símbolos Inúteis

- **Algoritmo: Exclusão de Símbolos Inúteis**
 - *Etapa 1: qualquer variável gera terminais.*
- Seja G uma GLC e G_1 a GLC resultante da Etapa 1 do algoritmo.
 - $G = (V, T, P, S)$
 - $G_1 = (V_1, T, P_1, S)$
- A construção de $V_1 \subseteq V$

```

 $V_1 = \emptyset;$ 
repita  $V_1 = V_1 \cup \{ A \mid A \rightarrow \alpha \in P \text{ e } \alpha \in (T \cup V_1)^* \}$ 
até que o cardinal de  $V_1$  não aumente;

```

- P_1 possui os mesmos elementos que P , excetuando-se
 - produções cujas variáveis não pertencem a V_1

Simplificação de GLC – Símbolos Inúteis

- **Algoritmo: Exclusão de Símbolos Inúteis**
 - *Etapa 2: qualquer símbolo é atingível a partir do símbolo inicial*
- Seja $G_1 = (V_1, T, P_1, S)$ GLC resultante da Etapa 1
 - $G_2 = (V_2, T_2, P_2, S)$ é a GLC resultante da Etapa 2

```

 $T_2 = \emptyset;$ 
 $V_2 = \{ S \};$ 
repita
   $V_2 = V_2 \cup \{ A \mid X \rightarrow \alpha A \beta \in P_1, X \in V_2 \};$ 
   $T_2 = T_2 \cup \{ a \mid X \rightarrow \alpha a \beta \in P_1, X \in V_2 \}$ 
até que os cardinais de  $V_2$  e  $T_2$  não aumentem;

```

- P_2 possui os mesmos elementos que P_1 , excetuando-se
 - Produções cujos símbolos não pertencem a V_2 ou T_2 .

EXEMPLO: Simplificação de GLC – Símbolos Inúteis

- Exclusão dos Símbolos Inúteis
 - *Etapa 1: Qualquer variável gera terminais*

- Considere a GLC:

$$G = (\{ S, A, B, C \}, \{ a, b, c \}, P, S)$$

$$P = \{ S \rightarrow aAa \mid bBb,$$

$$A \rightarrow a \mid S,$$

$$C \rightarrow c \}$$

Iteração	Variáveis
início	\emptyset
1	$\{ A, C \}$
2	$\{ A, C, S \}$
3	$\{ A, C, S \}$

```

 $V_1 = \emptyset;$ 
repita  $V_1 = V_1 \cup \{ A \mid A \rightarrow \alpha \in P \text{ e } \alpha \in (T \cup V_1)^* \}$ 
até que o cardinal de  $V_1$  não aumente;

```

- $S \rightarrow bBb$ é excluída: B não pertence ao novo conjunto de variáveis.

EXEMPLO: Simplificação de GLC – Símbolos Inúteis

- Exclusão dos Símbolos Inúteis
 - Etapa 2: qualquer símbolo é atingível a partir do símbolo inicial**

- G1 é a GLC resultante da etapa 1

$$G1 = (\{ A, C, S \}, \{ a, c \}, P, S)$$

$$P = \{ S \rightarrow aAa, \\ A \rightarrow a \mid S, \\ C \rightarrow c \}$$

- G2 é a GLC resultante da Etapa 2

$$G2 = (\{ S, A \}, \{ a \}, P, S)$$

$$P = \{ S \rightarrow aAa, \\ A \rightarrow a \mid S \}$$

Iteração	Variáveis	Terminais
início	{S}	\emptyset
1	{S, A}	{a}
2	{S, A}	{a}

$C \rightarrow c$ é excluída:

C e c não pertencem aos novos conjuntos.

```
T2 =  $\emptyset$ ;
V2 = { S };
repita
  V2 = V2  $\cup$  { A | X  $\rightarrow$   $\alpha$  A  $\beta$   $\in$  P1, X  $\in$  V2 };
  T2 = T2  $\cup$  { a | X  $\rightarrow$   $\alpha$  a  $\beta$   $\in$  P1, X  $\in$  V2 }
até que os cardinais de V2 e T2 não aumentem;
```

Simplificação de GLC – Produções vazias

- Produções Vazias:
 - São produções vazias da forma $A \rightarrow \epsilon$
- A Exclusão de produções vazias
 - Pode determinar modificações diversas nas produções
- Algoritmo: Exclusão de Produções Vazias (3 etapas)**
 - Etapa 1: variáveis que constituem produções vazias**
 - $A \rightarrow \epsilon$: variáveis que geram diretamente ϵ
 - $B \rightarrow A$: sucessivamente, variáveis que indiretamente geram ϵ
 - Etapa 2: Exclusão de produções vazias**
 - Considera apenas as produções não vazias.
 - Cada produção cujo lado direito possui uma variável que gera ϵ , determina uma produção adicional, sem essa variável.
 - Etapa 3: geração da palavra vazia, quando necessário.**

Simplificação de GLC – Produções vazias

- **Algoritmo: Exclusão de Produções Vazias**
 - *Etapa 1: Variáveis que constituem produções vazias*
- Seja $G = (V, T, P, S)$ uma GLC
 - V_ϵ : é o conjunto das variáveis que geram ϵ .

```

 $V_\epsilon = \{ A \mid A \rightarrow \epsilon \};$ 
repita
   $V_\epsilon = V_\epsilon \cup \{ X \mid X \rightarrow X_1 \dots X_n \in P$ 
  tal que  $X_1, \dots, X_n \in V_\epsilon \}$ 
até que o cardinal de  $V_\epsilon$  não aumente;

```

Simplificação de GLC – Produções vazias

- **Algoritmo: Exclusão de Produções Vazias**
 - *Etapa 2: exclusão de produções vazias*
- Seja $G = (V, T, P, S)$ uma GLC
 - $G_1 = (V, T, P_1, S)$ é a GLC resultante
- A construção de P_1 :

```

 $P_1 = \{ A \rightarrow \alpha \mid \alpha \neq \epsilon \};$ 
repita
  para toda  $A \rightarrow \alpha \in P_1, X \in V_\epsilon$  tal que
     $\alpha = \alpha_1 X \alpha_2, \alpha_1 \alpha_2 \neq \epsilon$ 
  faça  $P_1 = P_1 \cup \{ A \rightarrow \alpha_1 \alpha_2 \}$ 
até que o cardinal de  $P_1$  não aumente;

```

Simplificação de GLC – Produções vazias

- **Algoritmo: Exclusão de Produções Vazias**
 - *Etapa 3: geração da palavra vazia, se necessário*
- Se ϵ pertence à linguagem
 - Introduza a produção $S \rightarrow \epsilon$
- A gramática resultante é:
 - $G_2 = (V, T, P_2, S)$
 - $P_2 = P_1 \cup \{S \rightarrow \epsilon\}$

EXEMPLO: Simplificação de GLC – Produções Vazias

- Exclusão das Produções Vazias
 - *Etapa 1: variáveis que constituem produções vazias.*

$G = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, P, S)$ é uma GLC

$P = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid \epsilon,$

$X \rightarrow a \mid b \mid Y,$

$Y \rightarrow \epsilon \}$

$V_\epsilon = \{A \mid A \rightarrow \epsilon\};$

repita

$V_\epsilon = V_\epsilon \cup \{X \mid X \rightarrow X_1 \dots X_n \in P$

tal que $X_1, \dots, X_n \in V_\epsilon\}$

até que o cardinal de V_ϵ não aumente;

Iteração	V_ϵ
início	$\{S, Y\}$
1	$\{S, Y, X\}$
2	$\{S, Y, X\}$

EXEMPLO: Simplificação de GLC – Produções Vazias

- Exclusão das Produções Vazias
 - **Etapa 2: exclusão de produções vazias**

Iteração	V_ϵ
início	{S, Y}
1	{S, Y, X}
2	{S, Y, X}

- Seja G uma GLC
 - $G = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, P, S)$
 - $P = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid \epsilon,$
 - $X \rightarrow a \mid b \mid Y,$
 - $Y \rightarrow \epsilon\}$
- G1 é a GLC resultante
 - $G1 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, P, S)$
 - $P = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb,$
 - $X \rightarrow a \mid b \mid Y\}$

```

P1 = { A → α | α ≠ ε };
repita
  para toda A → α ∈ P1, X ∈ Vε tal que
    α = α1 X α2, α1 α2 ≠ ε
  faça P1 = P1 ∪ { A → α1 α2 }
até que o cardinal de P1 não aumente;
  
```

Iteração	Produções
início	{S → aXa bXb, X → a b Y}
1	{S → aXa bXb aa bb, X → a b Y}
2	{S → aXa bXb aa bb, X → a b Y}

Simplificação de GLC – Produções vazias

- Exclusão das Produções Vazias
 - Etapa 3: geração da palavra vazia, se necessário.
 - A palavra vazia pertence à linguagem:
 - $S \rightarrow \epsilon$ é incluída
- Gramática resultante (Sem Produções Vazias)**
 - $G2 = (\{S, X, Y\}, \{a, b\}, P2, S)$
 - $P2 = \{S \rightarrow aXa \mid bXb \mid aa \mid bb \mid \epsilon,$
 - $X \rightarrow a \mid b \mid Y\}$
 - Observe
 - Y, originalmente um símbolo útil, resultou em um símbolo inútil
 - A exclusão de produções vazias gerou símbolo inútil
 - Conclusão
 - Não é qualquer combinação de simplificações de gramática que atinge o resultado desejado

Simplificação de GLC: Produções que Substituem Variáveis

- Produções que Substituem Variáveis
 - São produção que substitui uma variável por outra
 - EXEMPLO:
 - $A \rightarrow B$
 - Não adicionam informação em termos de geração de palavras
- Se $B \rightarrow \alpha$, então
 - $A \rightarrow B$ pode ser substituída por $A \rightarrow \alpha$

Simplificação de GLC: Produções que Substituem Variáveis

- Algoritmo: Produções que Substituem Variáveis
 - ***Etapa 1: Fecho transitivo de cada variável***
 - Conjunto de variáveis que podem substituí-la transitivamente.
 - EXEMPLO:
 - Se $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$, então B e C pertencem ao fecho de A
 - ***Etapa 2: Exclusão das produções que substituem variáveis***
 - Se α é atingível a partir de A através de seu fecho.
 - Substitui $A \rightarrow B$ por $A \rightarrow \alpha$

Simplificação de GLC: Produções que Substituem Variáveis

Algoritmo: Produções que Substituem Variáveis

- *Etapa 1: fecho transitivo de cada variável*
- Seja $G = (V, T, P, S)$ uma GLC

```
para toda  $A \in V$ 
faça  $FECHO-A = \{ B \mid A \neq B \text{ e } A \Rightarrow^+ B \text{ usando}$ 
    exclusivamente produções de  $P$  da forma  $X \rightarrow Y \}$ ;
```

Simplificação de GLC: Produções que Substituem Variáveis

Algoritmo: Produções que Substituem Variáveis

- *Etapa 2: Exclusão das produções que substituem variáveis*
- G_1 é a GLC resultante de Etapa 1
 - $G_1 = (V, T, P_1, S)$
- A construção de P_1

```
 $P_1 = \{ A \rightarrow \alpha \mid A \rightarrow \alpha \in P \text{ e } \alpha \notin V \}$ ;
```

```
para toda  $A \in V$  e  $B \in FECHO-A$ 
faça se  $B \rightarrow \alpha \in P$  e  $\alpha \notin V$ 
    então  $P_1 = P_1 \cup \{ A \rightarrow \alpha \}$ ;
```

EXEMPLO: Produções que Substituem Variáveis

- Seja G uma GLC
 - $G = (\{ S, X \}, \{ a, b \}, P, S)$
 - $P = \{ S \rightarrow aXa \mid bXb,$
 - $X \rightarrow a \mid b \mid S \mid \varepsilon \}$
- **Etapa 1: fecho transitivo da cada variável**
 - FECHO-S = \emptyset
 - FECHO-X = $\{ S \}$

```
para toda  $A \in V$ 
faça FECHO-A =  $\{ B \mid A \neq B \text{ e } A \Rightarrow^+ B \text{ usando}$ 
exclusivamente produções de  $P$  da forma  $X \rightarrow Y \}$ ;
```

EXEMPLO: Produções que Substituem Variáveis

- $G = (\{ S, X \}, \{ a, b \}, P, S)$
- $P = \{ S \rightarrow aXa \mid bXb,$
- $X \rightarrow a \mid b \mid S \mid \varepsilon \}$

- FECHO-S = \emptyset
- FECHO-X = $\{ S \}$

Iteração	Produções
inicial	$\{ S \rightarrow aXa \mid bXb, X \rightarrow a \mid b \mid \varepsilon \}$
S	$\{ S \rightarrow aXa \mid bXb, X \rightarrow a \mid b \mid \varepsilon \}$
X	$\{ S \rightarrow aXa \mid bXb, X \rightarrow a \mid b \mid \varepsilon \mid aXa \mid bXb \}$

- G_1 é a GLC resultante
 - $G_1 = (\{ S, X \}, \{ a, b \}, P_1, S)$
 - $P_1 = \{ S \rightarrow aXa \mid bXb,$
 - $X \rightarrow a \mid b \mid \varepsilon \mid aXa \mid bXb \}$

```
 $P_1 = \{ A \rightarrow \alpha \mid A \rightarrow \alpha \in P \text{ e } \alpha \notin V \};$ 
para toda  $A \in V$  e  $B \in \text{FECHO-A}$ 
faça se  $B \rightarrow \alpha \in P$  e  $\alpha \notin V$ 
então  $P_1 = P_1 \cup \{ A \rightarrow \alpha \};$ 
```

Simplificação de GLC – Simplificações Combinadas

- Não é qualquer combinação de simplificações de GLC que atinge o resultado desejado
- Sequência de simplificação recomendada
 1. Exclusão das produções vazias
 2. Exclusão das produções que substituem variáveis
 3. Exclusão dos símbolos inúteis

[FIM]

- FIM:
 - **[AULA 12]** LLC – Simplificação de GLC
- Próxima aula:
 - **[AULA 13]** LLC – Forma Normal de Chomsky