[Aula 05] Linguagens regulares – Autômato finito com movimentos vazios (AFNε)

Prof. João F. Mari
joaof.mari@ufv.br

ROTEIRO

- Autômato finito com movimentos vazios
- **[EX]** AFNε: a’s antecedem b’s
- Computação – Computação vazia
- **[EX]** Computação – Computação vazia
- Computação de um AFNε para uma entrada w
- Equivalência entre AFN e AFNε
- **[EX]** Construção de um AFN a partir de um AFNε

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Movimentos vazios :
  - Generalizam os movimentos não determinísticos.
- Movimento vazio:
  - Transição **sem leitura** de símbolo algum da fita;
  - Interpretado como um não-determinismo **interno** ao autômato;
    - Exceto por uma eventual mudança de estados nada mais pode ser observado.
- Algumas vantagens:
  - **Facilita** algumas construções e demonstrações.
- AFNε possui o mesmo poder de computação que AFN e AFD:
  - Movimento vazio **não** aumenta o poder de reconhecimento de linguagens;
  - Qualquer AFNε pode ser simulado por um AFD.

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

$$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

- **Σ**: alfabeto (de símbolos) de entrada
- **Q**: conjunto de estados possíveis
- **δ**: **Função programa** ou **Função de Transição** (Função Parcial)

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{ \varepsilon \}) \rightarrow 2^Q$$

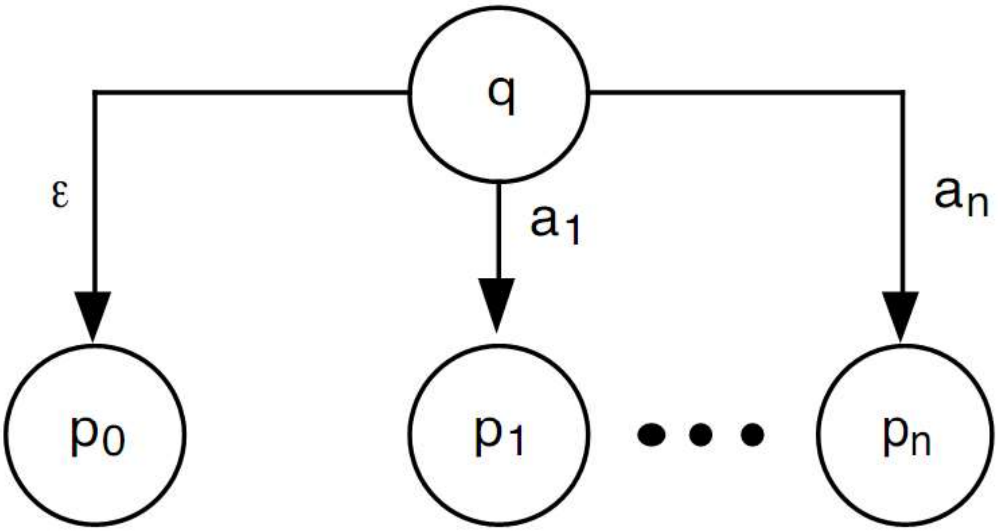
  - Movimento vazio ou transição vazia

$$\delta(p, \varepsilon) = \{ q_1, q_2, \ldots, q_n \}$$

- $\mathbf{q_0}$: Elemento distinguido de Q: estado inicial
- **F**: Subconjunto de Q: conjunto de estados finais

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Autômato como diagrama
  - $\delta(q, \varepsilon) = \{ p_0 \}$ $\delta(q, a_1) = \{ p_1 \}$ … $\delta(q, a_n) = \{ p_n \}$



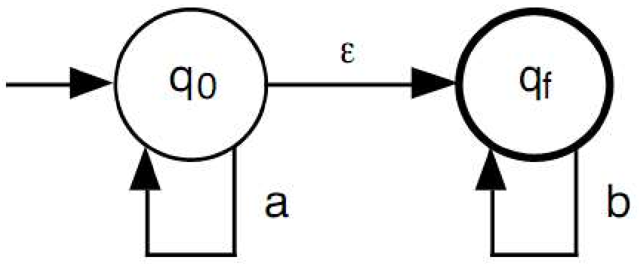
Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Computação de um AFNε:
  - Análoga à de um AFN.

- Processamento de uma **transição vazia:**
  - Não determinístico;
  - Assume simultaneamente os estados **destino** e **origem**;
  - Origem de um movimento vazio: caminho alternativo.

[EX] AFNε: a's antecedem b's

- $M_7 = (\{ a, b \}, \{ q_0, q_f \}, \delta_7, q_0, \{ q_f \})$



δ_7	a	b	ε
q_0	$\{ q_0 \}$	-	$\{ q_f \}$
q_f	-	$\{ q_f \}$	

[AULA 05] LR – Autômato Finito com movimentos vazios SIN 131 – Introdução à Teoria da Computação (PER 3)

Computação – Computação Vazia

- A definição da Computação de um AFNε:
  - É facilitada se primeiro definirmos a computação das transições vazias;
  - Ou simplesmente computação vazia...
    - A partir de um estado ou de um conjunto de estados.

Computação – Computação Vazia

M = (Σ, Q, δ, q_0, F)

- **Computação Vazia** ou **Função Fecho Vazio** (um estado)

$$\boldsymbol{\delta\varepsilon: Q \rightarrow 2^Q}$$

- Indutivamente definida
  - $\delta\varepsilon(q) = \{ q \}$, se $\delta(q, \varepsilon)$ é indefinida
  - $\delta\varepsilon(q) = \{ q \} \cup \delta(q, \varepsilon) \cup (\cup_{p\in\delta(q,\varepsilon)} \delta\varepsilon(p))$, caso contrário
- **Computação Vazia** ou **Função Fecho Vazio** (conjunto de estados)

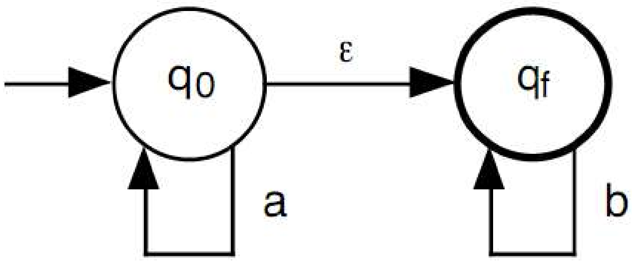
$$\delta\varepsilon^*: 2^Q \rightarrow 2^Q$$

  - tal que:

$$\delta\varepsilon^*(P) = \cup_{q\in P} \delta\varepsilon(q)$$

- Por simplicidade, δε e δε*
  - Ambas denotadas por δε

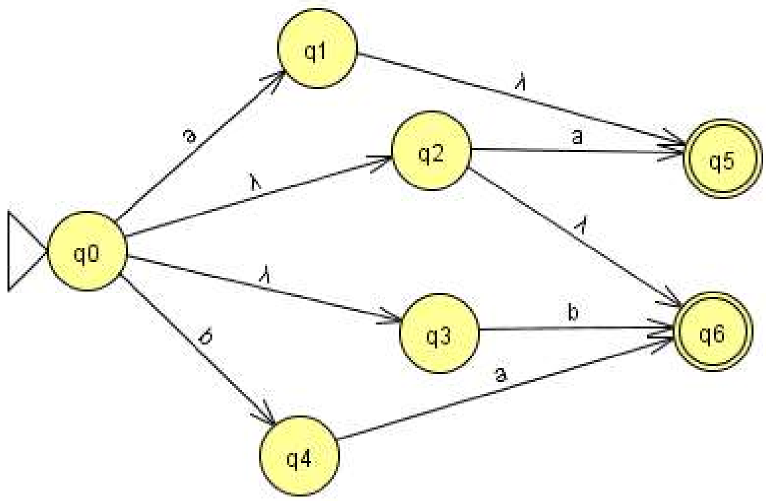
[EX] Computação – Computação Vazia



- $\delta\varepsilon(q_0) = \{ q_0, q_f \}$
- $\delta\varepsilon(q_f) = \{ q_f \}$
- $\delta\varepsilon(\{ q_0, q_f \}) = \{ q_0, q_f \}$

[EX] Computação – Computação Vazia

- $\delta\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_2, q_3, q_6\}$
- $\delta\varepsilon(q_1) = \{q_1, q_5\}$
- $\delta\varepsilon(q_2) = \{q_2, q_6\}$
- $\delta\varepsilon(q_3) = \{q_3\}$
- $\delta\varepsilon(q_4) = \{q_4\}$
- $\delta\varepsilon(q_5) = \{q_5\}$
- $\delta\varepsilon(q_6) = \{q_6\}$



Computação de um AFNε para uma entrada w

- Computação de um AFNε para uma entrada w:
  - Sucessiva aplicação da **função programa**...
    - para cada símbolo de w (da esquerda para a direita).
  - Cada passo de aplicação **intercalado** com **computações vazias**,
    - até ocorrer uma condição de parada.

- Assim, antes de processar a próxima transição determinar:
  - Todos os demais estados atingíveis **exclusivamente** por movimentos vazios.

Computação de um AFNε para uma entrada w

- M = (Σ, Q, δ, q_0, F) AFNε

$$\delta^*: 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

- Indutivamente definida:
  - $\delta^*(P, \varepsilon) = \delta\varepsilon(P)$
  - $\delta^*(P, wa) = \boxed{\delta\varepsilon(R)}$ onde $R = \{ r \mid \boxed{r} \in \delta(s, a) \text{ e } \boxed{s} \in \delta^*(P, w) \}$

Todos os estados atingidos depois de ler w e a

Todos os estados atingidos depois de ler w.

computação vazia de R

  - Ou de forma mais simples:
    - $\delta^*(P, wa) = \delta\varepsilon(r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \delta^*(P, w))$

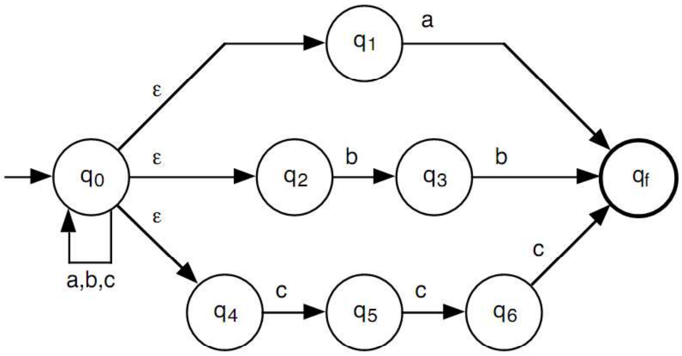
- Parada do processamento, Ling. Aceita/Rejeitada:
  - Análoga à do autômato finito não determinístico.

[EX] Computação Vazia, Computação.

- $\delta^*(\{ q_0 \}, abb)$ $= \delta\varepsilon(\{ r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \underline{\delta^*(\{ q_0 \}, ab)} \})$ (1)
- $\delta^*(\{ q_0 \}, ab)$ $= \delta\varepsilon(\{ r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \underline{\delta^*(\{ q_0 \}, a)} \})$ (2)
- $\delta^*(\{ q_0 \}, a)$ $= \delta\varepsilon(\{ r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \underline{\delta^*(\{ q_0 \}, \varepsilon)} \})$ (3)

- Como:
  - $\delta^*(\{ q_0 \}, \varepsilon) \} = \delta\varepsilon(\{ q_0 \}) =$ $\{ q_0, q_1, q_2, q_4 \}$ considerado em (3)
  - $\delta^*(\{ q_0 \}, a) =$ $\{ q_0, q_1, q_2, q_4, q_f \}$ considerado em (2)
  - $\delta^*(\{ q_0 \}, ab) =$ $\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 \}$ considerado em (1)

- Resulta na computação: $\delta^*(\{ q_0 \}, abb) = \{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_f \}$



Equivalência entre AFN e AFNε

- Classe dos Autômatos Finitos com Movimentos Vazios é **equivalente** à Classe dos Autômatos Finitos Não determinísticos

- Prova: (por indução)
- Basta mostrar que:
  - A partir de um AFNε M qualquer é possível ...
  - construir um AFN M_N que realiza as mesmas computações.
  - Sendo que M_N simula M.

- AFNε → AFN
  - Construção de uma **função programa** **sem** **movimentos vazios.**
  - **Conjunto de estados destino** de cada transição **não** vazia;
    - Ampliado com os demais estados possíveis de serem atingidos exclusivamente por transições vazias.

Equivalência entre AFN e AFNε

- $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ um AFNε qualquer. AFN construído:

$$M_N = (\Sigma, Q, \delta_N, q_0, F_N)$$

- $\delta_N: Q \times \Sigma \to 2^Q$ é tal que:

$$\delta_N(q, a) = \delta^*(\{ q \}, a)$$

- F_N é o conjunto de todos os estados q pertencentes a Q

$$\delta\varepsilon(q) \cap F \neq \emptyset$$

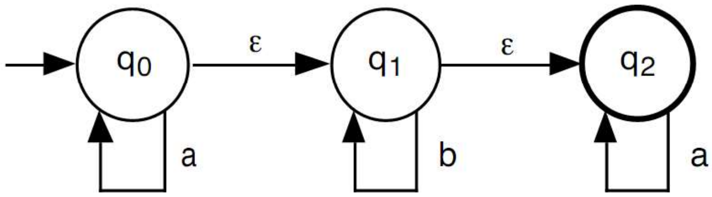
  - Estados que atingem estados finais via computações vazias.

- Portanto, linguagem aceita por AFNε:
  - É Linguagem Regular ou Tipo 3.

[EX] Construção de um AFN a partir de um AFNε

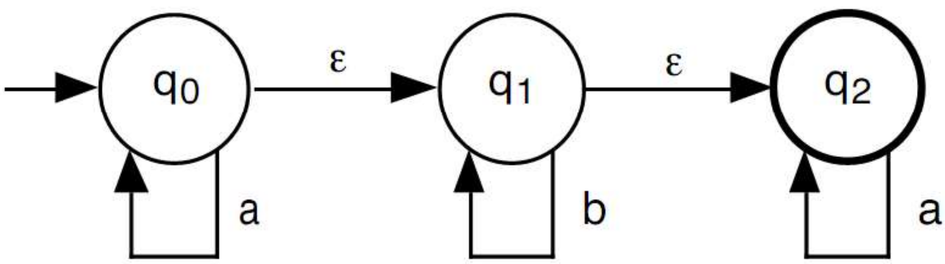
- $M_9 = (\{ a, b \}, \{ q_0, q_1, q_2 \}, \delta_9, q_0, \{ q_2 \})$ - AFNε

δ_9	a	b	ε
q_0	$\{ q_0 \}$	-	$\{ q_1 \}$
q_1	-	$\{ q_1 \}$	$\{ q_2 \}$
q_2	$\{ q_2 \}$	-	-



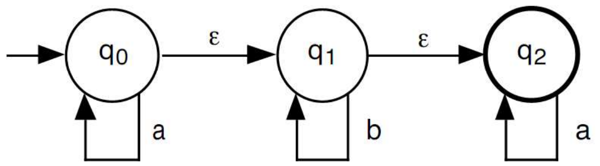
[EX] Construção de um AFN a partir de um AFNε

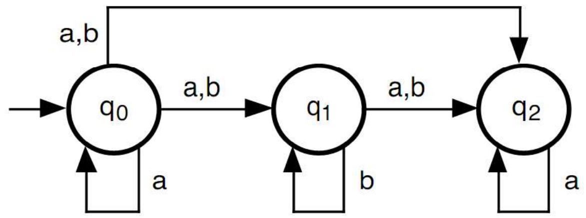
- $F_N = \{ q_0, q_1, q_2 \}$
  - $\delta\varepsilon(q_0) = \{ q_0, q_1, q_2 \}$
  - $\delta\varepsilon(q_1) = \{ q_1, q_2 \}$
  - $\delta\varepsilon(q_2) = \{ q_2 \}$
- Na construção de δ_{9N}
  - $\delta_9^*(\{ q_0 \}, \varepsilon) = \{ q_0, q_1, q_2 \} \xrightarrow{s}$
  - $\delta_9^*(\{ q_1 \}, \varepsilon) = \{ q_1, q_2 \} \xrightarrow{s}$
  - $\delta_9^*(\{ q_2 \}, \varepsilon) = \{ q_2 \} \xrightarrow{s}$



[EX] Construção de um AFN a partir de um AFNε

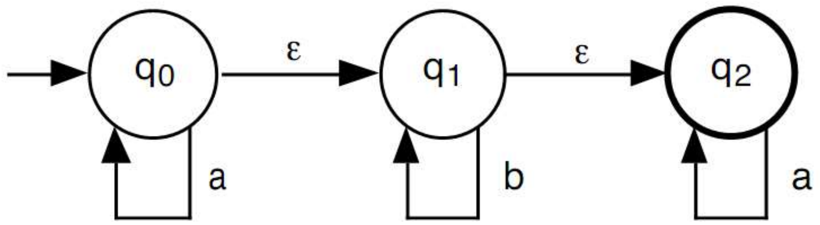
- Assim, δ_{9N} é tal que:
  s
  - $\delta_{9N}(q_0, a) = \delta_9^*(\{ q_0 \}, a) =$ $\delta\varepsilon(\{ r \mid r \in \boxed{\delta(s, a)} \text{ e } s \in \boxed{\delta^*(\{ q_0 \}, \varepsilon)} \}) =$
  - $\delta\varepsilon(\{q0, q2\}) =$ $\mathbf{\{ q_0, q_1, q_2 \}}$
  - $\delta_{9N}(q_0, b) = \delta_9^*(\{ q_0 \}, b) =$ $\delta\varepsilon(\{ r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \delta^*(\{ q_0 \}, \varepsilon) \}) =$
  - $\delta\varepsilon(\{q1\}) =$ $\mathbf{\{ q_1, q_2 \}}$
  - $\delta_{9N}(q_1, a) = \delta_9^*(\{ q_1 \}, a) =$ $\delta\varepsilon(\{ r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \delta^*(\{ q_1 \}, \varepsilon) \}) =$
  - $\delta\varepsilon(\{q2\}) =$ $\mathbf{\{ q_2 \}}$
  - $\delta_{9N}(q_1, b) = \delta_9^*(\{ q_1 \}, b) =$ $\delta\varepsilon(\{ r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \delta^*(\{ q_1 \}, \varepsilon) \}) =$
  - $\delta\varepsilon(\{q1\}) =$ $\mathbf{\{ q_1, q_2 \}}$
  - $\delta_{9N}(q_2, a) = \delta_9^*(\{ q_2 \}, a) =$ $\delta\varepsilon(\{ r \mid r \in \delta(s, a) \text{ e } s \in \delta^*(\{ q_2 \}, \varepsilon) \}) =$
  - $\delta\varepsilon(\{q2\}) =$ $\mathbf{\{ q_2 \}}$
  - $\delta_{9N}(q_2, b) = \delta_9^*(\{ q_2 \}, b) = \delta\varepsilon(\{ r \mid r \in \delta(s, b) \text{ e } s \in \delta^*(\{ q_2 \}, \varepsilon) \})$ é **indefinida**.



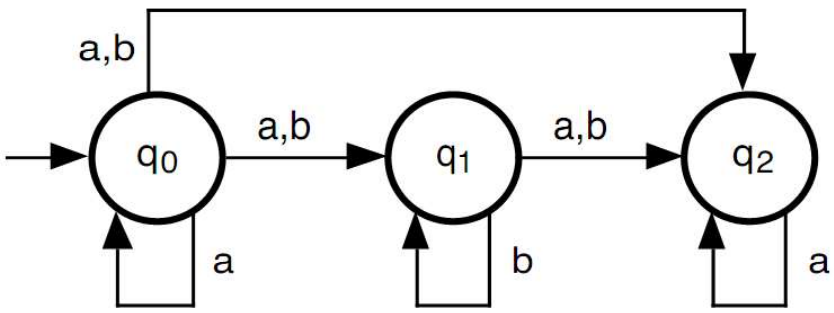


[EX] Construção de um AFN a partir de um AFNε

AFNε - $M_9 = (\{ a, b \}, \{ q_0, q_1, q_2 \}, \delta_9, q_0, \{ q_2 \})$



$M_{9N} = (\{ a, b \}, \{ q_0, q_1, q_2 \}, \delta_{9N}\ q_0, F_N)$



BIBLIOGRAFIA

- MENEZES, P. B. **Linguagens formais e autômatos**, 6. ed., Bookman, 2011.
  - Capítulo 3.
  - + Slides disponibilizados pelo autor do livro.

[FIM]

- FIM:
  - **[AULA 05]** LINGUAGENS REGULARES – Autômato Finito com movimentos vazios
- Próxima aula:
  - **[AULA 06]** LINGUAGENS REGULARES – Expressão regular