[Aula 04] Linguagens regulares – Autômato finito não determinístico (AFN)

Prof. João F. Mari
joaof.mari@ufv.br

BIBLIOGRAFIA

- MENEZES, P. B. **Linguagens formais e autômatos**, 6. ed., Bookman, 2011.
  - Capítulo 3.
  - + Slides disponibilizados pelo autor do livro.

ROTEIRO

- Autômato finito não determinístico
- Linguagem aceita, linguagem rejeitada
- **[EX]** aa ou bb como subpalavra
- **[EX]** aaa como sufixo
- Equivalência entre AFD e AFN
- Determinismo x Não determinismo
- **[EX]** AFN → AFD

Autômato finto não determinístico

- Não-determinismo:
  – Importante generalização dos modelos de máquinas;
  – Fundamental em estudos:
    - Teoria da Computação,
    - Linguagens Formais,
    - Modelos para Concorrência, …

Autômato finto não determinístico

- O não determinismo não aumenta o poder de reconhecimento de linguagens da classe de autômatos.
  - Qualquer autômato finito **não determinístico** pode ser simulado por um autômato finito **determinístico.**

- Não-determinismo no programa, é uma função parcial:
  - **dependendo do estado corrente e do símbolo lido,**
  - **determina um conjunto de estados do autômato.**

- O AFN assume um conjunto de estados alternativos:
  - Multiplicação da unidade de controle;
  - Uma para cada alternativa;
  - Unidades de Controle processando independentemente e sem compartilhar recursos.

Autômato finto não determinístico

$$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

- **Σ**: Alfabeto (de símbolos) de entrada

- **Q**: Conjunto de estados possíveis (finito)

- **δ**: Função programa ou Função de Transição
  - É uma função parcial.

$$\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$$

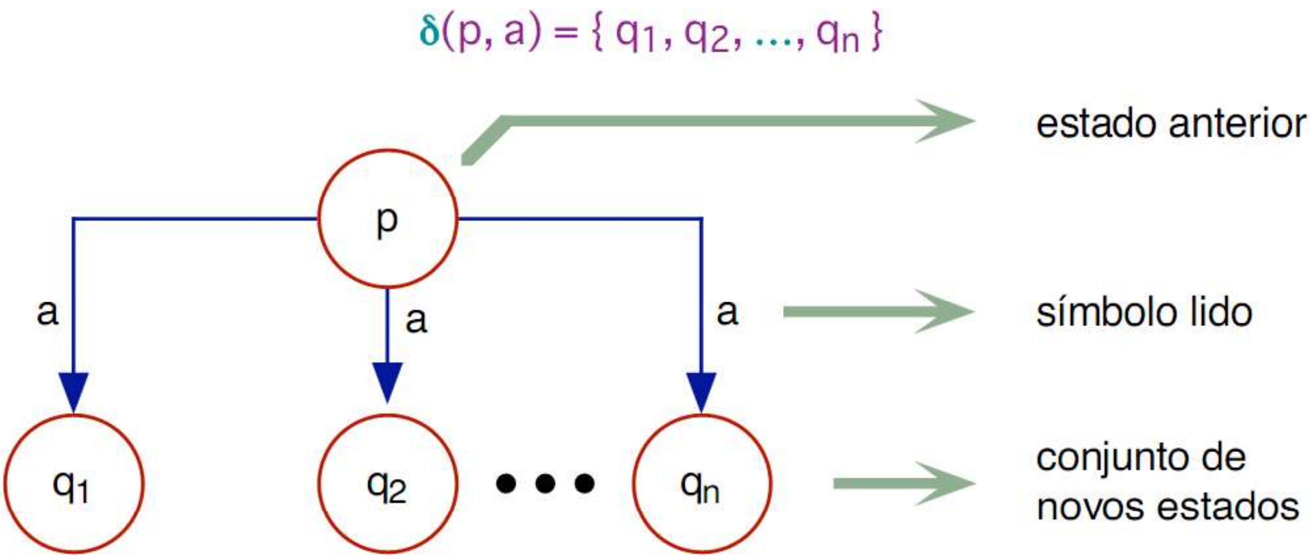
  - Transição: $\delta(p, a) = \{ q_1, q_2, \ldots, q_n \}$

- **q_0**: Estado Inicial (é um elemento distinguido de Q)

- **F**: Conjunto de estados finais (um subconjunto de Q)

Autômato finto não determinístico

- Autômato como diagrama:



[AULA 04] LR – Autômato Finito Não Determinístico SIN 131 – Introdução à Teoria da Computação (PER 3)

Autômato finto não determinístico

- **Computação** (Função Programa Estendida) de um autômato finito não-determinístico:
  - Sucessiva aplicação da função programa...
  - para cada símbolo da entrada (da esquerda para a direita)...
  - até ocorrer uma **condição de parada**.
- Argumentos para computação:
  - Conjunto finito de estados e uma palavra.

Autômato finto não determinístico

- M = $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ autômato finito não-determinístico

$$\delta^*: 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

- Indutivamente definida
  - $\delta^*(P, \varepsilon) = P$
  - $\delta^*(P, aw) = \delta^*(\cup_{q \in P} \delta(q, a), w)$

- Transição estendida:
  - Para um conjunto de estados $\{ q_1, q_2, ..., q_n \}$ e para o símbolo a:
    - $\delta^*(\{ q_1, q_2, ..., q_n \}, a) = \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a) \cup ... \cup \delta(q_n, a)$

Autômato finito não determinístico

- Parada do processamento:
  - Aceita a entrada:
    - Após **processar o último símbolo da fita**, ...
    - existe pelo menos **um estado final** ...
    - pertencente ao conjunto de estados alternativos atingidos.
  - Rejeita a entrada. **Duas possibilidades:**
    - (1) Após processar o último símbolo da fita, todos os estados alternativos atingidos são **não finais**;
    - (2) Programa **indefinido** para o argumento (conjunto de estados e símbolo).

Linguagem Aceita, Linguagem Rejeitada

- Seja $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ um AFN:

- **Linguagem Aceita** ou Linguagem Reconhecida por M

$$L(M) = ACEITA(M) = \{ w \mid \delta^*(\{ q_0 \}, w) \cap F \neq \emptyset \}$$

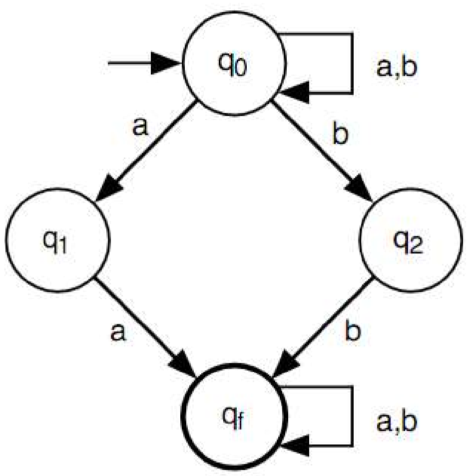
- **Linguagem Rejeitada** por M
  - $REJEITA(M) = \{ w \mid \delta^*(\{ q_0 \}, w) \cap F = \emptyset$ ou $\delta^*(\{ q_0 \}, w)$ é indefinida $\}$

[EX] aa ou bb como subpalavra

$$L_5 = \{ w \mid w \text{ possui aa ou bb como subpalavra } \}$$

- Autômato finito não-determinístico:

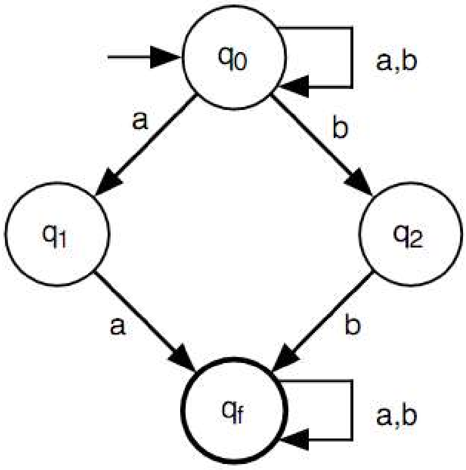
$$M_5 = (\{ a, b \}, \{ q_0, q_1, q_2, q_f \}, \delta_5, q_0, \{ q_f \})$$



Autômato finto não determinístico

[EX] aa ou bb como subpalavra

- O ciclo em q_0 realiza uma varredura em toda a entrada:
  - O caminho $q_0/q_1/q_f$ garante a ocorrência de aa.
  - O caminho $q_0/q_2/q_f$ garante a ocorrência de bb.



δ_5	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
q_1	$\{q_f\}$	-
q_2	-	$\{q_f\}$
q_f	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$

Autômato finto não determinístico

[EX] aa ou bb como subpalavra

Computação da palavra abaa:

- $\delta^*(\{q_0\}, abaa)$ = % Função estendida sobre **abaa**
- $\delta^*(\delta(q_0, a), baa)$ = % Processa **<u>a</u>baa**
- $\delta^*(\{q_0, q_1\}, baa)$ = % Função estendida sobre **baa**
- $\delta^*(\delta(q_0, b) \cup \delta(q_1, b), aa)$ = % Processa **<u>b</u>aa**
- $\delta^*(\{q_0, q_2\} \cup \emptyset, aa)$ =
- $\delta^*(\{q_0, q_2\}, aa)$ = % Função estendida sobre **aa**
- $\delta^*(\delta(q_0, a) \cup \delta(q_2, a), a)$ = % Processa **<u>a</u>a**
- $\delta^*(\{q_0, q_1\} \cup \emptyset, a)$ =
- $\delta^*(\{q_0, q_1\}, a)$ = % Função estendida sobre **a**
- $\delta^*(\delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a), \varepsilon)$ = % Processa **<u>a</u>**
- $\delta^*(\{q_0, q_1\} \cup \{q_f\}, \varepsilon)$ =
- $\delta^*(\{q_0, q_1, q_f\}, \varepsilon)$ = $\{q_0, q_1, q_f\}$ % Função estendida sobre **<u>ε</u>**

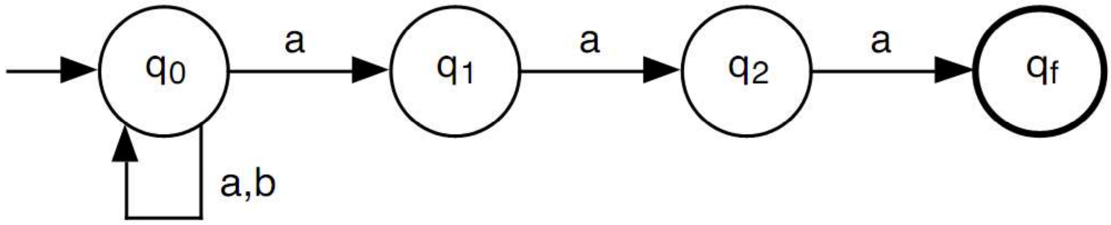
- A palavra abaa é aceita pois $\{q_0, q_1, q_f\} \cap F = \{q_f\} \neq \emptyset$

[EX] aaa como sufixo

L_6 = { w | w possui aaa como sufixo }

- Autômato finito não-determinístico:

$$M_6 = (\{ a, b \}, \{ q_0, q_1, q_2, q_f \}, \delta_6, q_0, \{ q_f \})$$



Equivalência entre AFD e AFN

- Classe dos Autômatos Finitos Determinísticos:
  - É **equivalente** à classe dos Autômatos Finitos Não-Determinísticos.
- Não-determinismo:
  - **Aparentemente**, um significativo acréscimo ao poder computacional do autômato finito;
  - **Na realidade** não aumenta seu poder computacional.

Equivalência entre AFD e AFN

- Seja **$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$** um AFN qualquer.
- E **$M_D = (\Sigma, Q_D, \delta_D, <q_0>, F_D)$** o AFD construído.

  - **Q_D**: todas as combinações, sem repetições, de estados de Q
    - Notação **$<q_1q_2…q_n>$**
    - A ordem não distingue combinações: **$<q_uq_v> = <q_vq_u>$**
    - Imagem de todos os estados alternativos de M.

  - **δ_D**: $Q_D \times \Sigma \rightarrow Q_D$

$\delta_D(<q1…q_n>, a) = <p_1…p_m>$ **sse** $\delta^*(\{q_1, …, q_n\}, a) = \{p_1, …, p_m\}$

  - **$<q_0>$**: Estado inicial;

  - **F_D:** Conjunto de estados $<q_1q_2…q_n>$ pertencentes a Q_D:
    - alguma componente q_i pertence a F, para i em { 1, 2, …, n }.

Equivalência entre AFD e AFN

- Portanto, linguagem aceita por AFN:
  - É **Linguagem Regular** ou **Tipo 3.**

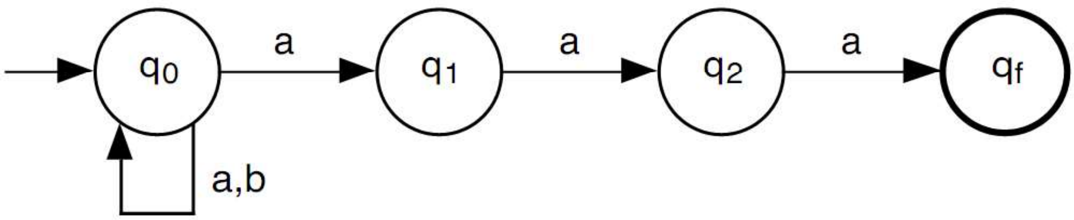
Determinismo × Não Determinismo

- Muitas vezes é **mais fácil** desenvolver um AFN do que um AFD.
  - Solução determinista:
    - **Não é trivial** – número grande de estados;
  - Solução não-determinista:
    - **Mais simples** – poucos estados;

- **Alternativa** para construir um AFD:
  - **Desenvolver** inicialmente **AFN;**
  - **Converter** o AFN em AFD.

[EX] AFN → AFD

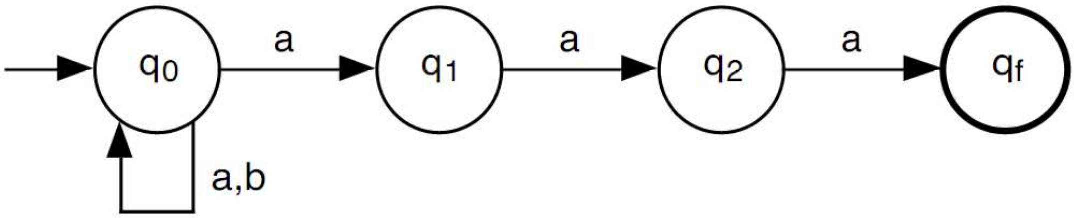
- $M_6 = (\{ a, b \}, \{ q_0, q_1, q_2, q_f \}, \delta_6, q_0, \{ q_f \})$



Autômato finto não determinístico

[EX] AFN → AFD

- $M_6 = (\{ a, b \}, \{ q_0, q_1, q_2, q_f \}, \delta_6, q_0, \{ q_f \})$



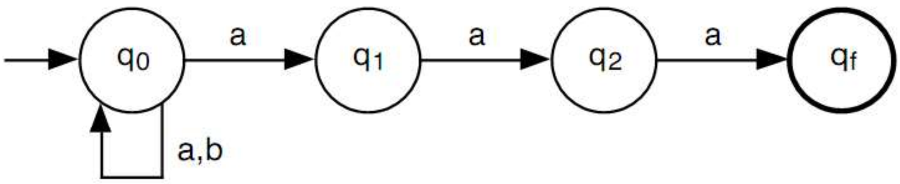
- $M_{6D} = (\{ a, b \}, Q_D, \delta_{6D}, <q_0>, F_D)$
  - $Q_D = \{ <q_0>, <q_1>, <q_2>, <q_f>, <q_0q_1>, <q_0q_2>, <q_0q_f>, <q_1q_2>, \ldots, <q_0q_1q_2q_f> \}$
  - $F_D = \{ <q_f>, <q_0q_f>, <q_1q_f>, \ldots, <q_0q_1q_2q_f> \}$

[AULA 04] LR – Autômato Finito Não Determinístico SIN 131 – Introdução à Teoria da Computação (PER 3)

Autômato finto não determinístico

[EX] AFN → AFD

- AFN



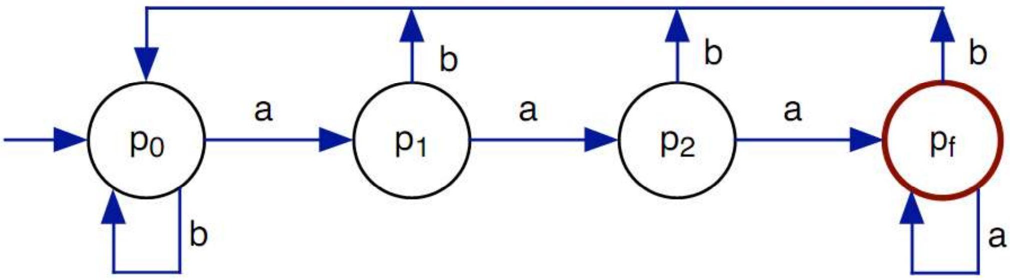
δ_{6D}	a	b
$\langle q_0 \rangle$	$\langle q_0q_1 \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$\langle q_0q_1 \rangle$	$\langle q_0q_1q_2 \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$\langle q_0q_1q_2 \rangle$	$\langle q_0q_1q_2q_f \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$\langle q_0q_1q_2q_f \rangle$	$\langle q_0q_1q_2q_f \rangle$	$\langle q_0 \rangle$

Autômato finto não determinístico

[EX] AFN → AFD

- AFD

δ_{6D}	a	b
$p_0 = \langle q_0 \rangle$	$\langle q_0 q_1 \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$p_1 = \langle q_0 q_1 \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$p_2 = \langle q_0 q_1 q_2 \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 \rangle$
$p_f = \langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 q_1 q_2 q_f \rangle$	$\langle q_0 \rangle$



[AULA 04] LR – Autômato Finito Não Determinístico SIN 131 – Introdução à Teoria da Computação (PER 3)

[FIM]

- FIM:
  - **[AULA 04]** LINGUAGENS REGULARES – Autômato Finito Não Determinístico
- Próxima aula:
  - **[AULA 05]** LINGUAGENS REGULARES – Autômato Finito com movimentos vazios